2026年度 高知大学大学院 総合人間自然科学研究科
理工学専攻(修士課程) 第1次募集 入学試験

＜ 一般選抜 ＞
数学物理学コース　数学分野

専門科目

問 題 冊 子

問題冊子… 全４枚(表紙を含む)

解答要領…問題 1 ~ 3 は必答問題。

注 意 事 項

1. 試験開始の合図まで，この問題冊子を開かないこと。
2. 試験開始直後，問題冊子，解答冊子，下書用紙の枚数等を確認すること。
3. 試験中に，問題冊子・解答冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁及び下書用紙の不備等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせること。
4. 解答冊子の各ページの所定の欄すべてに受験番号を記入すること。
   なお，解答用紙には，必要事項以外は記入しないこと。
5. 解答は，必ず解答用紙の指定された箇所に記入すること。
6. 解答冊子の各ページは，切り離さないこと。
7. 配付された解答冊子は，持ち帰らないこと。
8. 試験終了後，問題冊子，下書用紙は持ち帰ること。
9. 試験終了後，指示があるまでは退室しないこと。

1 (1) αを0でない実数とし，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$を$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$をみたす実数列とする。このとき，次の問いに答えよ。

(i) ある番号N以上のすべての自然数nに対して$|a_n| \geq \frac{|\alpha|}{2}$が成り立つことを示せ。

(ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\alpha}$を示せ。

(2) fを$\mathbb{R}^2$上でC^2級の実数値関数とし，$\mathbb{R}^2$上の関数gを

$$g(u,v) = f(x,y),\ x = u^2 - v^2,\ y = 2uv \quad \left((u,v) \in \mathbb{R}^2\right)$$

により定める。このとき，次の問いに答えよ。

(i) 各$(u,v) \in \mathbb{R}^2$におけるgの偏微分係数$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)$と$\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)$を，$f$の偏導関数$\frac{\partial f}{\partial x}$と$\frac{\partial f}{\partial y}$を用いてあらわせ。

(ii) $\mathbb{R}^2$上で$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ならば，$\mathbb{R}^2$上で$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = 0$が成り立つことを示せ。

2 行列Aとベクトル$\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{p_2}, \boldsymbol{p_3}$を

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{p_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{p_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{p_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

で定める。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $A\boldsymbol{p_1}, A\boldsymbol{p_2}, A\boldsymbol{p_3}$を求めよ。

(2) Aの固有値を求めよ。

(3) $\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{p_2}, \boldsymbol{p_3}$は$\mathbb{R}^3$の基底となることを示せ。

(4) fは$\mathbb{R}^3$から$\mathbb{R}^3$への一次写像で，$\mathbb{R}^3$の標準基底に関するfの表現行列がAであるとする。このとき，(3)の基底に関するfの表現行列を求めよ。

3　実数全体の集合$\mathbb{R}$に$d(x,y)=|x-y|$ $(x,\ y\in\mathbb{R})$により距離が与えられていて，距離位相により位相空間になっているとする。さらに，写像$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$を$f(x)=x^2$により定義する。このとき，次の問いに答えよ。

(1) X,Yを集合とし，$B\subset Y$とする。このとき，写像$g:X\to Y$によるBの逆像$g^{-1}(B)$の定義を書け。

(2) 開区間(a,b) $(a<b)$に対して，写像fによる開区間(a,b)の逆像 $f^{-1}\big((a,b)\big)$を求めよ。

(3) (2)で求めた結果を用いて，fは位相空間$\mathbb{R}$の間の連続写像であることを示せ。